2.10.

Limita posloupnosti $\{a_n\}$

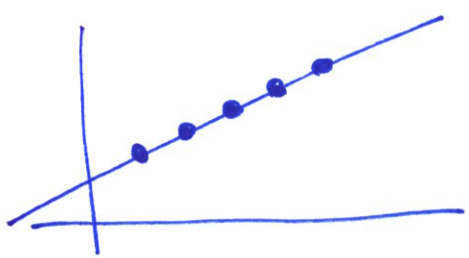
- jsou 3 možnosti:
  - posl. konverguje ($\exists\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$)
  - posl. diverguje do $\pm\infty$ ($\exists\ \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$)
  - posl. diverguje, nemá limitu

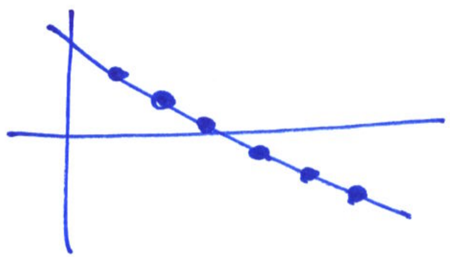
Př: limita aritmetické posl.

$$a_n = k\cdot n + c \quad (k, c \in \mathbb{R},\ k \neq 0)$$

Platí: $\lim (kn+c) = +\infty \iff k>0$

$\lim (kn+c) = -\infty \iff k<0$





Př: limita geometrické posl.

předpokládejme $a_n = q^n$ (tj. $b=1$)

Platí:

pro $q>1$: $\lim q^n = +\infty$

$q=1$: $\lim 1^n = 1$

$q \in (-1,1)$ $\begin{cases} q\in(0,1): & \lim q^n = 0 \\ q=0: & \lim 0^n = 0 \\ q\in(-1,0): & \lim q^n = 0 \end{cases}$

$q=-1$: $\lim (-1)^n$ neexistuje

$q<-1$: $\lim q^n$ —"—

Pozn: Posloupnost může začínat i jiným indexem než 1.

Př: $a_n = \frac{1}{n-1}$ je def. pro $n \geq 2$

To ale nemá vliv na hodnotu limity!

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností:

Předp. $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Pak $a_n + b_n \longrightarrow a + b$

$a_n - b_n \longrightarrow a - b$

$a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$

$a_n : b_n \longrightarrow a : b$ (pro $b_n, b \neq 0$)

Př: už víme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

chceme spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) \overset{\text{Věta o lim. součinu}}{=}$$

$$= \underbrace{\lim\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{\lim\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0} = 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Podobně lze ukázat, že pro

$\forall p \in \mathbb{N}$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0}$

Šlo by totéž spočítat dle věty o limitě podílu?

$$\lim \frac{1}{n^2} = \frac{\lim 1}{\lim n^2} = \frac{1}{+\infty} \overset{?}{=} 0$$

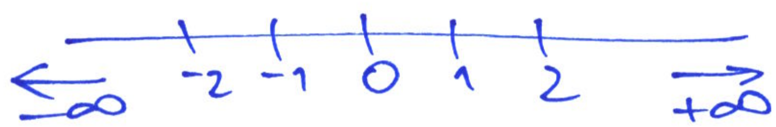
Potřebujeme zavést početní operace i s nekonečny.

Rozšíříme reálná čísla:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Na $\mathbb{R}^*$ zavedeme uspořádání:

$\forall a \in \mathbb{R}: -\infty < a < +\infty$



Dále zavedeme **početní operace** na $\mathbb{R}^*$ $(a \in \mathbb{R})$

$+\infty + a = +\infty$

$-\infty + a = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty - \infty$ NENÍ DEFINOVÁNO

$(+\infty) \cdot a = +\infty$ (pokud $a > 0$)

$(+\infty) \cdot a = -\infty$ (pokud $a < 0$)

$(+\infty) \cdot 0$ NENÍ DEFINOVÁNO

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$\frac{+\infty}{a} = +\infty$ (pokud $a > 0$)

$\frac{+\infty}{a} = -\infty$ (pokud $a < 0$)

$\frac{+\infty}{0}, \frac{a}{0}, \frac{0}{0}$ NENÍ DEFINOVÁNO

$\frac{+\infty}{+\infty}$ NENÍ DEFINOVÁNO

$\frac{a}{+\infty} = 0$

Znaménková pravidla:

$+ \cdot + = +$

$+ \cdot - = -$

$- \cdot - = +$

S tímto rozšířením stále platí Věta o limitě $+, -, \cdot, /$: i pro nekonečné limity (pokud je příslušná operace definovaná).

Př: Mů(ž)eme tedy lze udělat

$$\lim \frac{1}{n^2} = \frac{\lim 1}{\lim n^2} = \frac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Př: $\lim n^2 = \underbrace{(\lim n)}_{+\infty} \cdot \underbrace{(\lim n)}_{+\infty} =$

$= (+\infty) \cdot (+\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$

Obdobně $\boxed{\lim n^p = +\infty}$ pro $\forall p \in \mathbb{N}$

Příklady:

1) $$\lim_{n\to\infty}(n^5+3n^4+5n^3) \overset{\text{Věta o limitě } +}{=}$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}(n^5)}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(3n^4)}_{\substack{(\lim 3)\cdot(\lim n^4)\\ = 3\cdot(+\infty) = +\infty}} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(5n^3)}_{\substack{5\cdot(+\infty)\\ = +\infty}} =$$

$$= +\infty + \infty + \infty = \underline{\underline{+\infty}}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}(n^2-4n+3) =$$

$$= \lim(n^2) - \lim(4n) + \lim(3) =$$

$$= \boxed{+\infty - \infty} + 3$$

není definováno!

Pozor, to neznamená, že limita neexistuje! Jen musíme počítat jinak.

Finta č. 1: z celého výrazu vytkneme nejvyšší mocninu

Tedy: $$\lim(n^2-4n+3) =$$

$$= \lim n^2\cdot\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right) =$$

$$\overset{\text{V. o lim. součinu}}{=} \underbrace{(\lim n^2)}_{+\infty}\cdot\left(\lim\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\right) =$$

$$\left(1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right) \to \underbrace{1-0+0}_{=1}$$

$$= (+\infty)\cdot 1 = \underline{\underline{+\infty}}$$

4

Pro ilustraci: dosadíme $n = 1000$

$$n^2 = 1\,000\,000$$
$$4n = 4\,000$$
$$3 = 3$$

$$a_{1000} = 1\,000\,000 - 4\,000 + 3$$

Říkáme, že člen n^2 jde do $+\infty$ <u>řádově rychleji</u> než člen $4n$, píšeme „$n^2 \gg 4n$"

③ $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V. o lim.} \\ \text{podílu}}}{=} \frac{\lim(2n+1)}{\lim(n+1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

není def.

Opět <u>Finta č. 1</u>: z čitatele i jmenovatele vytkneme nejv. mocninu

$$\lim \frac{2n+1}{n+1} = \lim \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2+0}{1+0} = \underline{\underline{2}}$$

④ $$\lim \frac{n^3-5n+2}{3-n} \underset{=}{\text{F.1}} \lim \frac{n^3\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n\left(\frac{3}{n}-1\right)} = \lim n^2 \cdot \frac{1-0+0}{0-1} = (+\infty)\cdot(-1) = \underline{\underline{-\infty}}$$

5

5 $\lim \frac{2n+7}{n^2+3} \overset{F.1}{=} \lim \frac{n(2+\underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0})}{n^2(1+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0})} =$

$= \underbrace{\lim \frac{1}{n}}_{=0} \cdot \frac{2+0}{1+0} = 0 \cdot 2 = \underline{\underline{0}}$

Pozorujeme pravidlo pro limity typu $\lim a_n$, kde $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$,

kde p, q = polynomy:

- stupeň p < stupeň q $\Rightarrow \lim a_n = 0$
- stupeň p > stupeň q $\Rightarrow \lim a_n = \pm\infty$ (podle znamének vedoucích koef.)
- stupeň p = stupeň q $\Rightarrow \lim a_n = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, kde a, b = vedoucí koef. polynomů p, q